

## Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Fil] : *Analyse numérique*, Francis Filbet

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

[Ser] : *Matrices, theory and applications*, Jean-Pierre Serre

## I Partie A - Définitions et propriétés [Rom] [Gri] [Man-Mne]

### I.1 Première approche

■ **Déf 1 (Élément propre, sous-espace propre) :**

■ **Ex 2 :** Spectre des matrices de rotation.

■ **Thm 3 (Pivot de Gauss) :**

■ **Ex 4 :** Éléments propres de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Rem 5 :** Dans le cas d'opérateurs comprenant des intégrales, on peut trouver une équation différentielle.

■ **Ex 6 :** Éléments propres de l'opérateur dérivation. Spectre de l'opérateur de Volterra.

### I.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique

■ **Déf 7 (Polynôme caractéristique) :**

■ **Ex 8 :** Polynôme caractéristique d'une matrice  $2 \times 2$ .

■ **Thm 9 (Cayley-Hamilton) :**

■ **Ex 10 :** Spectre d'une matrice nilpotente.

## II Partie B - Encore de la réduction [Rom] [Gri]

### II.1 Diagonalisabilité

■ **Déf 11 (Diagonalisabilité) :**

■ **Thm 12 :**  $u$  est diagonalisable ssi  $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$  ssi  $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p})$ .

■ **Ex 13 :**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

■ **Thm 14 (Caractérisation diagonalisabilité) :**

■ **App 15 (Calcul d'une puissance) :**

■ **Ex 16 :** Puissance de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

■ **Prop 17 :** Si  $A$  est diagonalisable, alors  $e^A$  est diagonalisable.

### II.2 Trigonalisabilité

■ **Déf 18 (Trigonalisabilité) :**

■ **Ex 19 :**

■ **Thm 20 (Caractérisation trigonalisabilité) :**

■ **App 21 :** Toute matrice de  $(\mathbb{C})$  est semblable à une matrice triangulaire.

■ **Ex 22 :** La matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  est trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

### II.3 Application à la détermination (théorique) de valeurs propres [Man-Mne]

■ **Prop 23 (Polynôme caractéristique de  $P(A)$ ) :**

■ **Ex 24 (Groupe fini de matrices) :**

■ **Thm 25 (Version série entière) :**

■ **Ex 26 (Exponentielle) :**

**Rem 27 :** Motivation racines.

## II.4 Matrices symétriques

■ **Prop 28 :** Le spectre est réel.

**Thm 29 (Théorème spectral) :**

🐦 **Dév 30 (Min-Max de Courant-Fischer) :**

🐦 **Dév 31 (Weyl) :**

## III Partie C - Analyse numérique et localisation [Rom] [Sch] [Fil]

### III.1 Rayon spectral

■ **Déf 32 (Rayon spectral) :**

■ **Prop 33 (Relation norme - rayon spectral) :**

■ **Contre-Ex 34 :** On peut avoir  $\rho(A) > \|A\|$ , par exemple pour les matrices de rotations et la norme infinie.

**Thm 35 (Gelfand) :**

### III.2 Utilisation des éléments propres pour la norme [Bat-Zin]

**App 36 :** On a  $\|T\|_2^2 = \rho(T^*T)$ .

**Thm 37 (Opérateur de Volterra) :**

### III.3 Application aux méthodes itératives

■ **Prop 38 :** Critère de convergence d'une méthode itérative.

■ **Déf 39 (Conditionnement) :**

■ **Prop 40 (Conditionnement en norme 2) :**

■ **Ex 41 (Laplacien) :**

**App 42 :** Dépendance par rapport à une perturbation.

## III.4 Théorèmes de localisation [Cal-Per] [Ser]

■ **Prop 43 (Disques de Gerschgorin I) :**

■ **Ex 44 :** [ *Annexe : dessiner les disques* ].

**App 45 :** Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

🐦 **Dév 46 (Continuité des valeurs propres) :**

🐦 **Dév 47 (Disques de Gerschgorin II) :**

## IV Partie D - Méthodes de recherche de valeurs propres [Rom] [Sch] [Fil]

### IV.1 Méthodes numériques

**Thm 48 (Méthode de la puissance) :**

■ **Contre-Ex 49 :**

**Thm 50 (Puissance inverse) :**

## V Partie E - Hum... [Li]

### V.1 Opérateurs compacts

■ **Déf 51 :**  $T : E \rightarrow F$  est un opérateur compact si  $T(B_E)$  est relativement compact dans  $F$ .

■ **Ex 52 :** Les opérateurs de rang finis sont compacts.

■ **Prop 53 :** L'ensemble  $\mathcal{K}(E, F)$  est un sev fermé de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**App 54 :** Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

### V.2 Analyse spectrale

**Thm 55 (Spectre d'un opérateur compact) :**

■ **Ex 56 :** Spectre de l'opérateur de Volterra / Quasi-Primitive